

EXERCICE SUR STRUCTURE FINE :

Soit l'électron d'un atome hydrogénoïde de nombre quantique $n=3$.

- a) Donner l'expression de l'énergie E_n associé en fonction de α , m_e et c^2 .

Réponse : $E_3 = -\alpha m_e c^2 / 2 * (1/3^2)$

- b) Donner l'expression du Hamiltonien non relativiste H_0 de cet électron « piégé » par le potentiel coulombien de son noyau de charge Z .

Réponse : $H_0 = E_c + V(r) = p^2 c^2 / 2 m c^2 - Z e^2 / r$

- c) Combien d'état propre $|n, l, m_l, s, m_s\rangle$ de H_0 peut-on trouver pour cet électron. Donner la notation spectroscopique associée. Quelle est la dégénérescence du niveau $n=3$ dans ce cas.

Réponse : $n=3 ; l=0,1,2 ; s=1/2 m_s=+/-1/2$

$[3,0,0,1/2 ; +/-1/2\rangle ; [3,1,0 ; 1 ; -1] ; 1/2 ; +/-1/2\rangle, [3,2, \{-2; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}, 1/2, +/-1/2\rangle$

Dans cette description il y a donc 18 vecteurs de bases 1 niveau d'énergie soit $dg=18$.

Notation spectroscopique : 3s, 3p, 3d

- d) Dans cette description qu'elle serait l'énergie du photon émis lors du passage de l'électron de 3s à 3p ? est acceptable ? Quelles sont les corrections dites de structure fine doit-on apporter à notre Hamiltonien pour lever complètement ou partiellement la dégénérescence. (donner uniquement le sens physique de chaque interaction de structure fine et non leurs expressions)

Réponse : Elle serait nulle ! car $E_n = -E_n = 0$ puisque E_n ne dépend que de n . Ceci n'est donc pas acceptable. Il faut donc raffiner le modèle en introduisant les corrections du régime faiblement relativiste ainsi que l'interaction spin-orbitale. Voir la structure hyperfine.

- e) Quelle est la taille de la matrice associée l'ensemble de ces opérateurs de structure fine ?

Réponse : Il y a pour $n=3$ soit 18 vecteurs de bases donc la matrice associée à $H = H_0 + W_f + W_{hf}$ sera de 18×18 .

- f) Donner une expression générale en notation de Dirac des éléments de la sous-matrice de l'hamiltonien $H = H_0 + W(\text{StructureFine})$ dans le cas des états associés à $n=3$ et $l=1$ (3p) dans la base choisie en dans la question c. La matrice obtenue est-elle diagonale justifier.

Réponse : les éléments de matrice s'écrivent :

$\langle 3,1,m_l',1/2,m_s' | H_0 + W_f + W_{hf} | 3,1,m_l,1/2,m_s \rangle$. La matrice n'est pas diagonale à cause de l'introduction du moment $J=L+S$ et donc d'un nouveau nombre quantique associée à l'interaction Spin-orbitale.

Corrigé du problème

1 L'état fondamental de l'atome d'hélium

1. (a) Le nombre quantique ℓ est associé à l'observable \hat{L}^2 , où $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$ est l'opérateur moment cinétique orbital de l'électron. Les résultats possible d'une mesure de \hat{L}^2 sont $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ avec ℓ entier positif ou nul. Le nombre quantique m est associée à \hat{L}_z . Les résultats possibles d'une mesure de \hat{L}_z (ℓ étant fixé) sont $m\hbar$, où m est entier compris entre $-\ell$ et $+\ell$.

- (b) La partie orbitale de l'état fondamental s'écrit $\psi_{1,0,0}(\vec{r}) = Ce^{-Zr/a_1}$ avec $C = \frac{\sqrt{Z^3}}{\sqrt{\pi a_1^3}}$.
C'est un état de moment cinétique nul, à symétrie sphérique.

- (c) Cet état a une énergie $-Z^2 E_I$ avec $E_I = m_e e^4 / (2\hbar^2)$ et une taille $\sim a_1 / Z$.

2. (a) Dans cette approximation d'électrons indépendants, l'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 \quad \text{avec} \quad \hat{H}_i = \frac{\hat{p}_i^2}{2m_e} - \frac{2e^2}{\hat{r}_i} .$$

- (b) On obtient le niveau fondamental de l'atome en mettant chaque électron dans l'état orbital $\psi_{1,0,0}(\vec{r}_i)$ correspondant à l'état fondamental de \hat{H}_i . Chaque électron a l'énergie $-2m_e e^4 / \hbar^2$, soit une énergie totale :

$$E_f = -4m_e e^4 / \hbar^2 .$$

Pour satisfaire au principe de Pauli, il faut que le vecteur d'état des deux électrons soit antisymétrique par échange des deux électrons. La partie orbitale étant symétrique, il faut que les deux spins soient dans l'état singulet :

$$|\Psi_f\rangle = |1 : \psi_{1,0,0} ; 2 : \psi_{1,0,0}\rangle \otimes \frac{|1 : + ; 2 : -\rangle - |1 : - ; 2 : +\rangle}{\sqrt{2}} .$$

Le niveau fondamental n'est donc pas dégénéré.

- (c) On trouve $E_f = 8 \times (-13,6) = -108,8$ eV.

3. Il faut appliquer la théorie des perturbations au premier ordre dans le cas non dégénéré. Le déplacement du niveau fondamental dû à la perturbation V s'écrit :

$$\Delta E = \langle \Psi_f | \hat{V} | \Psi_f \rangle = \iint |\psi_{1,0,0}(\vec{r}_1)|^2 |\psi_{1,0,0}(\vec{r}_2)|^2 \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d^3 r_1 d^3 r_2 .$$

On pose $\vec{\rho}_i = 2\vec{r}_i / a_1$ et on trouve :

$$\Delta E = \frac{5}{4} \frac{e^2}{a_1} = 34,0 \text{ eV} .$$

A cet ordre du calcul, l'énergie de l'état fondamental est donc : $E_f = -108,8 + 34,0 = -74,8$ eV.

4. (a) L'ordre de grandeur de l'énergie d'interaction de deux dipôles magnétiques μ séparés par une distance d est $W \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu^2}{d^3}$. La distance entre les deux électrons est de l'ordre du rayon de Bohr a_1 . On a donc :

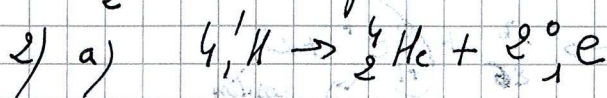
$$|W| \sim \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 \hbar^2}{4m_e^2 a_1^3} .$$

- (b) En remplaçant a_1 par sa valeur, on trouve : $|W| \sim \alpha^2 e^2 / a_1$. La correction d'énergie liée à l'interaction magnétique entre électrons est donc 10^4 fois plus faible que l'énergie d'interaction électrostatique. On peut la négliger à cet ordre du calcul.
5. La mesure expérimentale (-79 eV) donne un résultat remarquablement proche de la prédiction de ce modèle très simple ($-74,8$ eV). Pour aller au delà, on peut chercher à calculer les ordres suivants de la théorie des perturbations. On peut aussi utiliser des méthodes plus sophistiquées, consistant à évaluer pour chaque électron, le champ moyen créé par le noyau et l'autre électron (cf. Chap. 16, § 4.6).

Nucléosynthèse des éléments chimiques

1) ${}^4_2\text{He} \Rightarrow 2p + 2n$

${}^3_2\text{He} \Rightarrow 2p + 1n$



m_{He}, m_p, m_e

${}^4_2\text{He} = 4,002602$

${}^1_1\text{H} = 1,00794$

$1u = 931,48 \text{ MeV}$

$m_{\text{He}} = 6,644656 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

$|\Delta E| = 4 m_p c^2 - m_{\text{He}} c^2 - 2 m_e c^2$

AN: $|\Delta E| = 4 \times 1,67 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 - 6,64 \cdot 10^{-27} \times (3 \cdot 10^8)^2 - 2 \times 9,11 \cdot 10^{-31} \times (3 \cdot 10^8)^2$
 $= 21,95 \text{ MeV}$

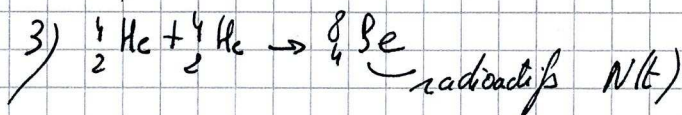
b) i) $\Gamma_0 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \Rightarrow \Gamma_{\text{H}} \approx 2 \cdot 10^{29} \text{ kg}$

$\Rightarrow \frac{2 \cdot 10^{29}}{1,67 \cdot 10^{-27}} \sim 1,2 \cdot 10^{56} \text{ noyaux}$

eq de $3 \cdot 10^{55}$ réactions de fusion

soit $3 \cdot 10^{55} \times 21,96 \cdot 10^6 \times 1,602 \cdot 10^{-19} \sim 1,053 \cdot 10^{44} \text{ J}$

ii) $E_0 / \text{an} = 10^{34} \text{ J} \Rightarrow \Delta t = 10,53 \text{ milliards d'années}$



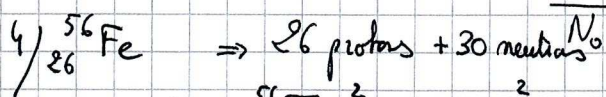
a) $dN = -\lambda N dt \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$

$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}} \Rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$

b) AN: $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{1,1 \cdot 10^{-16}} = 6,93 \cdot 10^{-17} \text{ s}$

c) $\frac{N(t_1)}{N_0} = e^{-\lambda t_1}$ avec $\lambda = 10^{-16} \text{ s}^{-1}$ et $1,4 \cdot 10^{-16} \text{ s}$

AN: $N(t_1) = e^{-1,4} \sim 0,247$



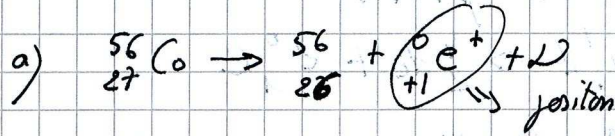
a) ${}^{56}_{26}\text{Fe} c^2 = m_{\text{Fe}} c^2 = 26 m_p c^2 + 30 m_n c^2 - E_E$

$m_{\text{Fe}} c^2 = Z m_p c^2 + (A-Z) m_n c^2 - E_E$

$\frac{E_E}{A} = \frac{Z}{A} m_p c^2 + \left(1 - \frac{Z}{A}\right) m_n c^2 - m_{\text{Fe}} c^2$ avec $Z = 26$ et $A = 56$

b) ${}^{56}_{27}\text{Fe}$ à l'extremum de la courbe $E_p/A = f(A)$
 \Leftrightarrow noyau le plus stable. $\Rightarrow 8,79 \text{ MeV/nucleon}$

5) ${}^{56}_{27}\text{Co} \rightarrow {}^{56}_{26}\text{Fe}^* \rightarrow$ produits de fission



b) $\frac{E^*}{f_{\text{onda}}} = 1,238 \text{ MeV} \Rightarrow$ ray γ issu de la désexcitation
 E des niveaux \Rightarrow quantifié